Travaux pratiques | [M] TP n°2

Étude du pendule simple

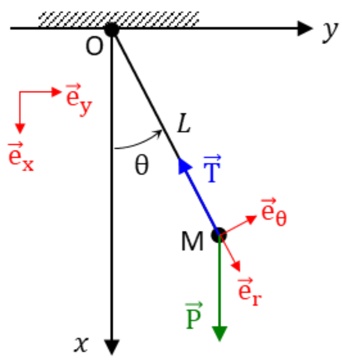
L'objectif de ce TP est, à travers l'étude du pendule simple, de revoir plusieurs compétences expérimentales acquises depuis le début de l'année :

- mesure d'un paramètre physique avec son incertitude de type B, compatibilité de deux mesures ;
- résolution numérique d'une équation différentielle ;
- étude du spectre d'un signal périodique.

I - Mesure du champ de pesanteur

I.1 - Théorie

On considère le pendule simple ci-contre : une masse m supposée ponctuelle est attachée à l'extrémité d'un fil de longueur L et de masse négligeable. On note $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ le référentiel terrestre supposé galiléen et $\mathcal{B} = (O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base polaire dans laquelle seront projetés les différents vecteurs.



Le PFD appliqué à la masse m dans $\mathcal{R}$ et projeté sur $\vec{e}_\theta$ donne :

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \sin(\theta) = 0} \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Aux **petits angles** ($\theta \ll 1$ rad), on obtient l'ED d'un oscillateur harmonique :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\, \theta(t) = 0}$$

I.2 - Mesure de l'accélération de pesanteur

L'accélération de pesanteur g est reliée à la période propre T_0 du pendule par la relation : $\boxed{g = 4\pi^2 \frac{L}{T_0^2}}$. Nous allons dans cette partie chercher à déterminer la valeur de g, avec son incertitude (type B).

Montrer que l'incertitude-type vaut :

$$u(g) = g\sqrt{\left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{u(T_0)}{T_0}\right)^2}$$

Mesurer L à la règle. Estimer $\Delta(L)$ et en déduire $u(L) = \Delta(L)/\sqrt{3}$.

Mesurer 20 périodes (approximativement) à l'aide d'un chronomètre. Estimer $\Delta(20T_0)$. En déduire que $\Delta(T_0) = \Delta(20T_0)/20$ (*c'est l'intérêt de mesurer un grand nombre de périodes*) puis $u(T_0)$.

Calculer g et $u(g)$. Donner le résultat avec le bon nombre de chiffres significatifs !

Calculer l'écart normalisé entre votre valeur et celle d'un autre binôme. Les mesures sont-elles compatibles ?

II - Analyse vidéo des oscillations

II.1 - Enregistrement vidéo

Ouvrir le script « dynamic_color_tracking.py » (dossier commun MPSI) et faire les réglages pour suivre le mouvement de la masse.

Exprimer $\theta(t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$.

Ouvrir le script « traitement_data.py ». Compléter le code afin de visualiser le graphique $\theta(t)$.

II.2 - Dérivée numérique

Nous allons dans cette partie dériver numériquement les données afin d'obtenir la vitesse angulaire $\omega(t) = d\theta/dt$.

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta(t+dt) - \theta(t)}{(t+dt) - (t)}$$

En discrétisant cette expression, on obtient :

$$\boxed{\omega[i] = \frac{\theta[i+1] - \theta[i]}{t[i+1] - t[i]}}$$

Cette relation permet de calculer numériquement la dérivée $\omega[i]$, connaissant $\theta[i]$, $\theta[i+1]$, $t[i]$ et $t[i+1]$. On appelle N l'indice du dernier élément de θ et t. Attention, cette méthode ne permet pas de calculer $\omega[N]$ puisque $\theta[N+1]$ et $t[N+1]$ ne sont, par définition de N, pas définis. L'indice du dernier élément de ω est donc $N-1$.

<u>Conclusion</u> : **la taille de l'array $\boldsymbol{\omega}$ est réduite de 1 par rapport à la taille de $\boldsymbol{\theta}$.**

- Écrire une fonction « deriv(t, s) », qui prend en argument deux arrays (temps « t » et signal « s ») et qui revoie deux arrays (temps « t2 » et dérivée « s2 ») de même dimension.
- Visualiser graphiquement $\omega(t)$. Expliquer pourquoi $\omega(t)$ est « bruité ».

II.3 - Filtrage du bruit

Dans cette partie, nous allons appendre à filtrer un signal numérique, afin de réduire le bruit introduit lors des calculs.

Ne pas faire cette partie dans l'immédiat. Y revenir en fin de TP s'il vous reste du temps.

Afin de réduire le bruit, nous allons créer un **filtre numérique moyenneur**. Ce filtre remplace chaque valeur d'un array par la moyenne des valeurs des indices voisins.

Soit A un array. En sortie de filtre, on obtient ainsi :

$$A[i] = \frac{1}{3}(A[i-1] + A[i] + A[i+1])$$

⚠ Lors de la réalisation du filtre, faire attention aux effets de bords, pour les indices $i = 0$ et $i = N$ (avec N l'indice du dernier élément de A).

- Compléter le code afin de filtrer ω, $\mathcal{E}_c$ et/ou $\mathcal{E}_m$. Constater graphiquement les améliorations.

III - Pendule simple aux grands angles

III.1 - Résolution de l'équation différentielle

- Ouvrir le fichier Python « ResolutionED.py ».
- Résoudre l'ED complète : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$ à l'aide de la fonction « odeint ». Prendre pour conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ (au choix) et $\omega(0) = 0$. Tracer la courbe sur un temps $t_{max} = 10\ \mathrm{T}_0$.
- Superposer la solution obtenue avec la solution issue de l'approximation harmonique : $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$.
- Constater les différences aux grands angles (augmenter progressivement θ_0 et aller jusqu'à $\theta_0 = 179$ °).

III.2 - Apparition de nouvelles fréquences

- Reprendre la résolution précédente en choisissant un temps $t_{max} = 1000\ \mathrm{T}_0$.

Une fonction nommée « SpectreFourier » a été écrite dans le script Python. Elle prend en argument un array des temps t et une fonction $y(t)$. Elle renvoie un array des fréquences $freq$ et le spectre en amplitude $spectre$ du signal.

```
freq, spectre = SpectreFourier(t, θ)
```

- Tracer le spectre en amplitude de la solution de l'ED. Montrer qu'aux grands angles, la fréquence fondamentale f_1 est inférieure à la fréquence propre f_0 du système. Montrer que des harmoniques $f_n = n \cdot f_1$ apparaissent. Quels sont les rangs n de ces harmoniques ?